Dùng phương pháp xác định nghiệm gần đúng của phương trình để đưa ra các thuật toán tính gần đúng giá trị của $\sqrt[n]{a}$ $(a>0, n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$.

1. Dựa vào phương pháp chia đôi
2. Dựa vào phương pháp xấp xỉ Newton
3. Dựa vào phương pháp xấp xỉ liên tiếp

Gọi x là giá trị của $\sqrt[n]{a_0}$, ta có: x= $\sqrt[n]{a_0} \Leftrightarrow x^n = a_0 \Leftrightarrow x^n - a_0 = 0(*)$

Đặt $f(x) = x^n - a_0$ thì (*) tương đương với phương trình f(x)= 0

Ta cần tìm giá trị gần đúng của $\sqrt[n]{a_0}$, tức là tìm gtgđ của nghiệm pt (*).

- Nếu $a_0 > 1$:

  $f(1) = 1^n - a_0 < 0$

  $f(a_0) = a_0^n - a_0 > 0$

  Do đó pt f(x)= 0 có nghiệm $\overline{x} \in (1, a_0)$
- Nếu $a_0 < 1$:

  $f(1) = 1^n - a_0 > 0$

  $f(a_0) = a_0^n - a_0 < 0$

  Do đó pt f(x)= 0 có nghiệm $\overline{x} \in (a_0, 1)$
- Nếu $a_0 = 1$ thì $\sqrt[n]{a_0} = 1$

Dựa vào phương pháp chia đôi:

1. Thuật toán:

- *Input: a_0, n, k.*

{cần tính giá trị gần đúng của $\sqrt[n]{a_0}$ với sai số không quá 10^{-k}, kết quả ghi ở dạng biểu diễn thập phân, có k chữ số sau dấu phẩy}

- *Output: $\overline{x}$ { $\overline{x}$ là gtgđ của $\sqrt[n]{a_0}$ thỏa điều kiện trên}*
- ***Giải thuật:***

B1: Nếu $a_0 > 1$ thì gán b= a_0, a= 1 và sang B2
Nếu $a_0 < 1$ thì gán b= 1, a= a_0 và sang B2
Nếu $a_0 = 1$ thì gán $\overline{x} = 1$ và dừng

B2: Nếu $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ thì gán $x^* = \frac{a+b}{2}$ và sang B5
Ngược lại sang B3

B3: Nếu $\frac{b-a}{2} \leq \frac{10^{-k}}{2}$ thì gán $x^* = \frac{a+b}{2}$ và sang B5
Ngược lại sang B4

B4: Nếu $f(\frac{a+b}{2})f(a) > 0$ thì gán $a = \frac{a+b}{2}$ và trở lại B2
Nếu $f(\frac{a+b}{2})f(a) < 0$ thì gán $b = \frac{a+b}{2}$ và trở lại B2

B5: Đặt $\overline{x}$ là làm tròn của x^* đến chữ số hàng thứ (-k). Dừng

2. *Ví dụ:*

Tính $\sqrt[3]{2}$, sai số không quá 10^{-2}

$a_0 = 2$, $n = 3$, $k = 2$

1

B1: $a_0 > 1$, $b = 2$, $a = 1$.

B2: $f\left(\dfrac{1+2}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{2-1}{2} = 0,5 > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1+2}{2}\right).f(1) < 0$

Gán b= $\dfrac{1+2}{2} = 1,5$

2

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{1+1,5}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{1,5-1}{2} = 0,25 > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1+1,5}{2}\right).f(1) > 0$

Gán a= $\dfrac{1+1,5}{2} = 1,25$

3

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{1,25+1,5}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{1,5-1,25}{2} = 0,125 > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1,25+1,5}{2}\right).f(1,25) < 0$

Gán b= $\dfrac{1,25+1,5}{2} = 1,375$

4

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{1,25+1,375}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{1,375-1,25}{2} = 0,0625 > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1,25+1,375}{2}\right).f(1,25) < 0$

Gán b= $\dfrac{1,25+1,375}{2} = 1,3125$

5

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{1,25+1,3125}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{1,3125-1,25}{2} = 0,03125 > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1,25+1,3125}{2}\right).f(1,25) < 0$

Gán b= $\dfrac{1,25+1,3125}{2} = 1,28125$

6

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{1,25+1,28125}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{1,28125-1,25}{2} = 0,015625 > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1,25+1,28125}{2}\right).f(1,25) < 0$

Gán b= $\dfrac{1,25+1,28125}{2} = \dfrac{81}{64}$

7

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{1,25+\dfrac{81}{64}}{2}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{\dfrac{81}{64}-1,25}{2} = 7,8125.10^{-3} > \dfrac{10^{-2}}{2}$

B4: $f\left(\dfrac{1,25+\dfrac{81}{64}}{2}\right).f(1,25) > 0$ gán a= $\dfrac{1,25+\dfrac{81}{64}}{2} = \dfrac{126}{128}$

8

(lặp)

B2: $f\left(\dfrac{81}{64}+\dfrac{161}{128}\right) \neq 0$

B3: $\dfrac{\dfrac{81}{64}-\dfrac{161}{128}}{2} = 3,90625.10^{-3} < \dfrac{10^{-2}}{2}$

$x^* = \dfrac{\dfrac{161}{128}+\dfrac{81}{64}}{2} = \dfrac{323}{256}$

B5: $\overline{x}$ = 1,26

Vậy $x = 1,26 \pm 10^{-2}$

Dựa vào phương pháp xấp xỉ Newton

$f'(x) = nx^{n-1}, f'(x) > 0, \forall x \in (1, a_0)$ (hoặc $(a_0, 1)$)

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, f''(x) > 0, \forall x \in (1, a_0)$ (hoặc $(a_0, 1)$)

1. ***Thuật toán:***

- *Input: a_0, n, k*
- *Output: $\overline{x}$ {$\overline{x}$ là 1 gtgđ của $\sqrt[n]{a_0}$, với sai số không quá 10^{-k}, $\overline{x}$ được ghi ở dạng biểu diễn thập phân có k chữ số sau dấu phẩy}*
- ***Giải thuật:***

B1: Nếu a_0> 1 thì gán b= a_0, a= 1 và sang B2
Nếu a_0< 1 thì gán b= 1, a= a_0 và sang B2
Nếu a_0= 1 thì gán $\overline{x}$ = 1 và dừng

B2: Gán x_0= b, $M = \dfrac{(n-1)b^{n-2}}{a^{n-1}}$

B3: Gán $x_1 = x_0 - \dfrac{x_0^n - a_0}{n.x_0^{n-1}}$

Đặt $\overline{x_1}$ là làm tròn của x_1, làm tròn đến chữ số hàng thứ -(k+1) và sang B4

{Lưu í: có một số trường hợp nếu ta chỉ làm tròn x_1 đến chữ số hàng thứ (-k-1) thì x_0= = $\overline{x_1}$. Khi đó ta lấy $\overline{x_1}$ là làm tròn của x_1 đến chữ số hàng thứ (-m) (m>k) nào đó, để $\overline{x_1} \neq x_0$ }

B4: Nếu $M.(|\overline{x_1} - x_0| + |x_1 - \overline{x_1}|)^2 < \dfrac{10^{-k}}{4}$ thì sang B5

Ngược lại gán x_0= $\overline{x_1}$ và quay lại bước 3

B5: Lấy $\overline{x}$ là làm tròn của $\overline{x_1}$, làm tròn đến chữ số hàng thứ -k (và dừng)

2. ***Ví dụ:*** Tính $\sqrt[3]{2}$, sai số không quá 10^{-2}…

a_0= 2, n= 3, k=2

1

B1: a_0= 2> 1, b= 2, a= 1

B2: x_0= 2, $\mu = \dfrac{(3-1).2^{3-2}}{1^{3-1}} = 4$

B3: $x_1 = 2 - \dfrac{2^3 - 2}{1^{3-1}} = 1,5$

$\overline{x_1} = 1,5; x_1 = 1,5$

B4: $4[|\overline{x_1} - x_0| + |x_1 - \overline{x_1}|]^2 = 4|\overline{x_1} - x_0|^2 = 1 > \dfrac{10^{-2}}{4}$

Gán x_0= 1,5

2

(lặp)

B3: $x_1 = 1,5 - \dfrac{1,5^3 - 2}{3.1,5^2}$

$\overline{x_1} = 1,296$

$x_1 = \overline{x_1} \pm \dfrac{1}{2}10^{-3}$

B4:

$4[|\overline{x_1} - x_0| + |x_1 - \overline{x_1}|]^2$

$\leq 4[0,204 + \dfrac{1}{2}.10^{-3}]^2 < 0,2$

Gán x_0= 1,296

(lặp)

B3: $x_1 = 1,296 - \dfrac{1,296^3 - 2}{3.1,296^2}$ **3**

$\overline{x_1} = 1,261$

$x_1 = \overline{x_1} \pm \dfrac{1}{2}.10^{-3}$

B4: $4[|\overline{x_1} - x_0| + |x_1 - \overline{x_1}|]^2$

$\le 4.[0,035 + \dfrac{1}{2}.10^{-3}]^2 = 5,041.10^{-3}$

Gán x_0= 1,261

(lặp)

B3: $x_1 = 1,261 - \dfrac{1,261^3 - 2}{3.1,261^2}$ **4**

$\overline{x_1} = 1,260$

$x_1 = \overline{x_1} \pm \dfrac{1}{2}10^{-3}$

B4: $4[|\overline{x_1} - x_0| + |x_1 - \overline{x_1}|]^2$

$\le 4[10^{-3} + \dfrac{1}{2}10^{-3}]^2 = 9.10^{-6} < \dfrac{10^{-2}}{4}$

B5: $\overline{x} = 1,26$

Vậy x= $1,26 \pm 10^{-2}$

Dựa vào phương pháp xấp xỉ liên tiếp

Đặt $g(x) = \dfrac{1}{n}[(n-1)x + \dfrac{a_0}{x^{n-1}}]$ *thì pt (*)* $\Leftrightarrow g(x) = x$

Với b= max{ a_0, 1}

Xét dãy $(x_k)_k$ định bởi $\begin{cases} x_0 = b \\ x_k = g(x_{k-1}) = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)x_{k-1} + \dfrac{a_0}{x_{k-1}^{n-1}}\right], k = 1, 2, \ldots \end{cases}$

thì:

$i. x_i \ge 0; i = 0,1,\ldots$

$ii. x_{i+1} = \dfrac{1}{n}[(n-1)x_i + \dfrac{a_0}{x_k^{n-1}}] \overset{(Cauchy)}{\ge} \sqrt[n]{a_0}, \forall i \in \mathbb{N}$

$iii. x_{k+1} - x_k = \dfrac{1}{n}[(n-1)x_k + \dfrac{a_0}{x_k^{n-1}}] - x_k = \dfrac{a_0 - x_k^n}{n.x_k^{n-1}} \le 0\ (do\, ii\ ), k = 0,1,\ldots$

Vậy dãy $(x_k)_k$ là dãy giảm, bị chặn dưới bởi $\sqrt[n]{a}$. Do đó $(x_k)_k$ là dãy hội tụ

$iv. \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = \sqrt[n]{a_0}$

Vậy dãy $(x_k)_k$ hội tụ về nghiệm của phương trình $g(x) = x$

Do đó, với một số k đủ lớn nào đó, ta có thể lấy x_k làm gtgđ cho $\sqrt[n]{a_0}$ với sai số không quá ϵ cho trước.

1. ***Thuật toán:***

❖ *Input: a_0, n, k*

❖ *Output: $\overline{x}$ {$\overline{x}$ là gtgđ của $\sqrt[n]{a_0}$, với sai số không quá 10^{-k}, $\overline{x}$ ghi ở dạng biểu diễn thập phân có k chữ số sau dấu phẩy}*

❖ ***Giải thuật:***

B1:	Gán b= max{a_0, 1}
B2:	x_0= b;
B3:	Gán $x_1 = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)x_0 + \dfrac{a_0}{x_0^{n-1}}\right]$

Đặt $\overline{x_1}$ là làm tròn của x_1, làm tròn đến chữ số hàng thứ -(k+1) và sang B4:

{Lưu í: có một số trường hợp nếu ta chỉ làm tròn x_1 đến chữ số hàng thứ -(k+1) thì x_0= = $\overline{x_1}$. Khi đó ta lấy $\overline{x_1}$ là làm tròn của x_1 đến chữ số hàng thứ (-m) (m>k) nào đó, để $\overline{x_1} \neq x_0$ }

B4:

+/ a_0> 1

Nếu $|\overline{x_1}^n - a_0| < 10^{-k-1}.\frac{n}{2}$ thì sang B5.

{Vì nếu $|\overline{x_1}^n - a_0| < 10^{-k-1}.\frac{n}{2}$ thì $|\overline{x_1}^n - \sqrt[n]{a_0}| < \dfrac{10^{-k-1}.\frac{n}{2}}{\overline{x_1}^{n-1}.\sqrt[n]{a_0} + ... + \overline{x_1}.(\sqrt[n]{a_0})^{n-1}} < \dfrac{10^{-k-1}.\frac{n}{2}}{n} = \dfrac{10^{-k-1}}{2}$}

Ngược lại, gán x_0= $\overline{x_1}$, quay lại B3

+ /a_0< 1:

Nếu $|\overline{x_1}^n - a_0| < a_0 10^{-k-1}.\frac{n}{2}$ thì sang B5.

{Vì nếu $|\overline{x_1}^n - a_0| < a_0 10^{-k-1}.\frac{n}{2}$ thì $|\overline{x_1}^n - \sqrt[n]{a_0}| < \dfrac{10^{-k-1}.\frac{a_0 n}{2}}{a_0 n} = \dfrac{10^{-k-1}}{2}$ }

Ngược lại, gán x_0= $\overline{x_1}$, quay lại B3

B5: Lấy $\overline{x}$ là làm tròn của $\overline{x_1}$, làm tròn đến chữ số hàng thứ -k

2. ***Ví dụ:*** **Tính $\sqrt[3]{2}$, sai số không quá 10^{-2}…**

a_0= 2, n= 3, k= 2

B1: b=2

B2: x_0= 2

1

B3: $x_1 = \frac{1}{3}\left[2,2 + \frac{2}{2^2}\right] = 1,5$

$\overline{x_1} = 1,5, x_1 = \overline{x_1}$

B4: $|\overline{x_1}^3 - 2| = |1,5^3 - 2| = 1,375 > \frac{3}{2}.10^{-3} = 0,0015$

Gán x_0= 1,5

(lặp)

2

B3: $x_1 = \frac{1}{3}\left[2,15 + \frac{2}{2^2}\right] = 1,5$

$\overline{x_1} = 1,296;\ x_1 = \overline{x_1} \pm \frac{1}{2}10^{-3}$

B4: $|\overline{x_1}^3 - 2| = |1,296^3 - 2| > 0,0015$

Gán x_0= 1,296

(lặp)

3

B3: $x_1 = \frac{1}{3}\left[2.1,296 + \frac{2}{1,296^2}\right]$

$\overline{x_1} = 1,261;\ x_1 = \overline{x_1} \pm \frac{1}{2}10^{-3}$

B4: $|\overline{x_1}^3 - 2| = |1,261^3 - 2| > 0,0015$

Gán x_0= 1,261

(lặp)

4

B3: $x_1 = \frac{1}{3}\left[2.1,261 + \frac{2}{1,261^2}\right]$

$\overline{x_1} = 1,260;\ x_1 = \overline{x_1} \pm \frac{1}{2}10^{-3}$

B4:

$|\overline{x_1}^3 - 2| = |1,260^3 - 2| = 3,76.10^{-4} < 0,0015 = \frac{3}{2}10^{-3}$

Gán $\overline{x} = 1,26$

Vậy $x = 1,26 \pm 10^{-2}$